შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17	26.04.2015/ მათ/IV/ 7/6

ამოცანა № 4	გვერდი № 1(2)

$(x^2-6x+8)P(x)=(x^2+2x)P(x-2) \iff$

$\iff (x-4)(x-2)P(x)=x(x+2)P(x-2)$

ცხადია თუ $x-4=0$ მაშინ $P(x-2)=0$ ე.ი. $P(2)=0$

ცხადია თუ $x-2=0$ მაშინ $P(x-2)=0$ ე.ი. $P(0)=0$

ცხადია თუ $x=0$ მაშინ $P(x)=0$ ე.ი. $P(0)=0$

ცხადია თუ $x+2=0$ მაშინ $P(x)=0$ ე.ი. $P(-2)=0$

ვთქვათ $P(a)=0$ და $a\neq\left[\begin{array}{l}0\\-2\\2\end{array}\right.$ მაშინ

x თუ ჩავსვამთ $a+2$ $P(a+2-2)=0$ ე.ი. მარცხენა მხარე არის ნული ე.ი. $P(a+2)=0$ ე.ი. გამოდის, რომ უსასრულოდ ბევრი რიცხვისთვის გამოდის, რომ $P(x)=0$ ე.ი. ნულოვანი მრავალწევრი ნულოვანია ან $P(x)=0$ ან ვთქვათ არ არსებობს ისეთი a რომ $P(a)=0$ და $a\neq\left[\begin{array}{l}0\\-2\\2\end{array}\right.$ ე.ი.

$P(x)=(x+2)^{\alpha}x^{\beta}(x-2)^{\gamma}$ სადაც $\alpha;\beta;\gamma$ მთელი არაუარყოფითია.

ჩავსვათ ეს მრავალწევრი და ვიპოვოთ $\alpha;\beta;\gamma$

$(x-4)(x-2)\cdot(x-2)^{\gamma}x^{\beta}(x+2)^{\alpha}=x(x+2)(x-4)^{\gamma}(x-2)^{\beta}x^{\alpha} \iff$

$\iff (x+2)^{\alpha-1}x^{\beta-\alpha-1}=(x-4)^{\gamma-1}(x-2)^{\beta-\gamma-1}$

და ცხადია ეს ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ სრულდება $\alpha=1$ $\gamma=1$ და $\beta=2$

საიდან პოლინომი გამოსავალს მხოლოდ ერთ [illegible] შეიძლება [illegible] და. და ვამოწმებ, რომ

$(x+1)^{\alpha-1} = 1$ $(x-4)^{\gamma-1} = 1$ და $x^{\beta-\alpha-1} = 1$ $(x-2)^{\beta-\gamma-1} = 1$

ე.ი. $\alpha = 1$ $\gamma = 1$ $\beta = 2$

ეს თავდაპირველი პოლინომია $P(x) = (x+2)\,x^2\,(x-2)$ ან

$P(x) = 0$

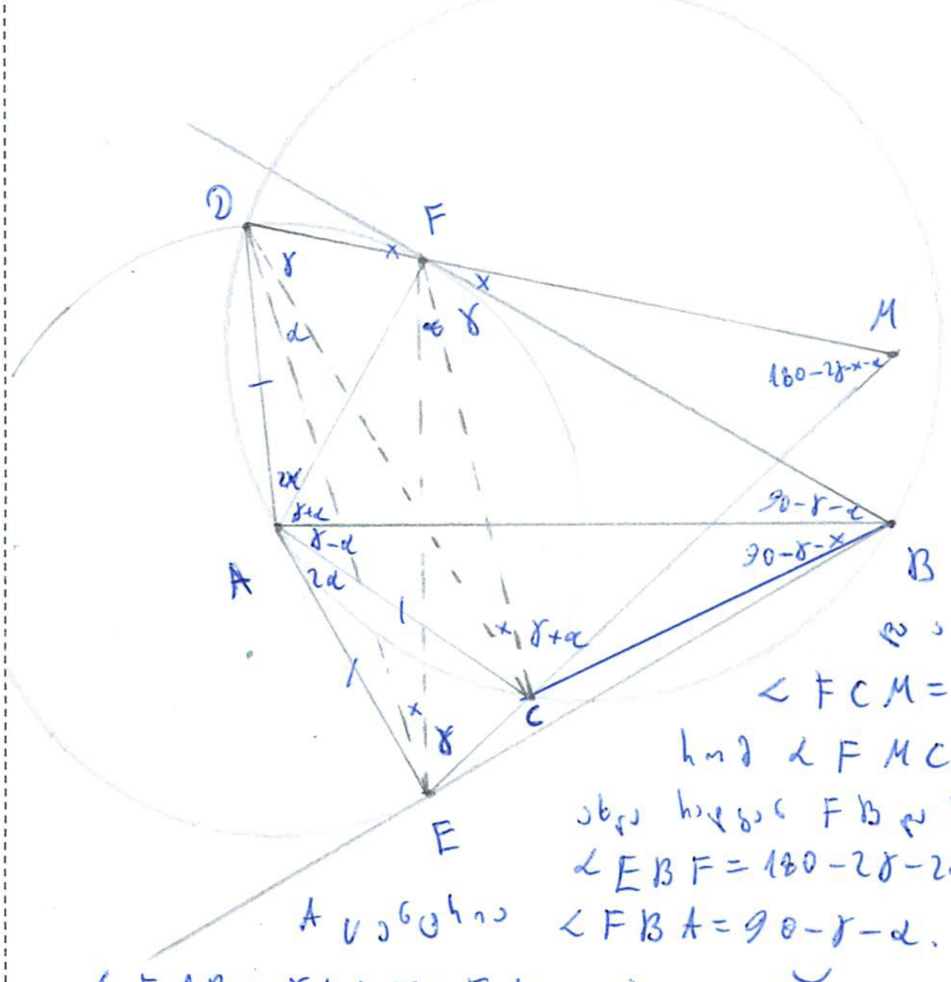
შევამოწმოთ ორივე

$P(x) = 0$ სწორია

$\cancel{(x-2)}\cancel{(x-4)}\cancel{x^2}\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)} = \cancel{x}\cancel{(x+2)}\ \cancel{(x-2)^2}\cancel{x}\cdot\cancel{(x-4)}$

პასუხი: $P(x) = 0$

$P(x) = x^2(x+2)(x-2)$



$\angle FDC=\gamma$ მაშინ $\angle FEC=\gamma$.

$\angle DEF=\angle DCF\equiv x$ მაშინ $\angle MFB=x$ რადგან FB მხებია.

ასევე $\angle EDC = \angle EFC=\alpha$ რადგან DFCE ციკლურია $\angle CFB=\gamma$

და ასევე ციკლურობით $\angle FCM=\gamma+\alpha$ გამოდის, რომ $\angle FMC=180-2\gamma-x-\alpha$

ასევე რადგან FB და BE მხებებია $\angle EBF=180-2\gamma-2\alpha$ ხოლო რადგან A ცენტრია $\angle FBA=90-\gamma-\alpha$. ცხადია $\angle FAB=\gamma+\alpha=\angle EAB$ რადგან $\overset{\frown}{EC}=2\alpha$ ე.ი. $\angle EAC=2\alpha$ ე.ი. $\angle CAB=90-\alpha$ ასევე $\overset{\frown}{DF}=2x$ ე.ი. $\angle DAF=2x$ ე.ი. $\angle CAD=2\gamma+2x$ ე.ი. $\angle ACD=90-\gamma-x$ მაგრამ $\angle ACD=\angle ADC$ ხოლო ტოლი წრეწირის $\angle ADC=\angle ABC=90-\gamma-x$ ე.ი. $\angle FBC=180-2\gamma-x-\alpha=\angle FMC$ ე.ი. FMBC ციკლურია: რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

26.04.2015/ მათ/IV/ 716

ამოცანა № 6

გვერდი № 1( )

მოდით დავამტკიცოთ ინდუქციით, რომ ნებისმიერი n-ისთვის $G_n \le 2D_n$. ცხადია ჯერ უნდა დავამტკიცოთ $n=2$-სთვის ე.ი. მოცემულია x_1 და x_2 სულ არის 2 ვარიანტი $\max\{|x_1|;|x_1+x_2|\}$ და $\max\{|x_2|;|x_1+x_2|\}$ განვიხილოთ ორი შემთხვევა, როდესაც x_1 და x_2 ორივეს ერთი ნიშანი აქვს და მეორე როდესაც განსხვავებული ცხადია, როდესაც ერთი ნიშანი აქვთ მაშინ $\max\{|x_1|;|x_1+x_2|\} = |x_1+x_2|$ და $\max\{|x_2|;|x_1+x_2|\}=|x_1+x_2|$

ამ შემთხვევაში G-ც და D-ც ტოლდება ე.ი. $G \le 2D$ სხვანაირად კი, როდესაც განსხვავებული ნიშნები აქვთ მაშინ განვიხილოთ $|x_1|>|x_2|$. $n(G)$ ვუწოდოთ n-ეულს რომელსაც ჯორჯი მიიღებს. მაშინ $2(G)$ იქნება $(x_2;x_1)$ და $G=\max\{|x_2|;|x_1+x_2|$ ვთქვათ $x_1=a$ $x_2=-b$ $a;b>0$ მაშინ $G=\max(b;a-b)$ ხოლო D იქნება G-ზე მეტი, ან ტოლი, რადგან $a>b$ და $a-b=a-b$. ანუ $n=2$ $G \le 2D$ დამტკიცდა. ახლა ვთქვათ $n=m$ ვიცით, რომ G ყოველთვის $\le 2D$ ახლა დავამტკიცოთ $n=m+1$ განვიხილოთ ის $G(m+1)$ დალაგებული $m+1$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

26.04.2015/ მათ/IV/ 7/6

ამოცანა № 6

გვერდი № 2(2)

ბოლო წევრია x_{m+1}. ვთქვათ სადაც არის ის ბოლო წევრი,
მაქსიმ მინიმუმ ცხადია $G_m \le G_{m+1}$ ვთქვათ გაიზარდა
მაშინ $G_{m+1} = |x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1}|$ ეს წევრი არ
შევა $(m+1)$-ედან ში შედის ე.ი. $D \geq G$ ე.ი. დავამტკიცებთ
ვთქვათ $G_m = G_{m+1}$ მაშინ $G(m)$-ის მიმდევრობის
წევრი არ არის $|x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1}|$ და არის სადაც სხვა
მაგრამ ვიცით, რომ $G_m \le 2D_m$. ახლა ვნახოთ ახლ ვიპოვით
D_{m+1} ახლ ვთქვათ $D_{m+1} = |x_i + x_k + \dots + x_j|$ თუ x_{m+1}
არ შედის მაში მაშინ ცხადია, რომ $D_{m+1} = D_m$ და
$G_m \le 2D_m$ ახლ თუ $x_i = x_{m+1}$